**Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών**

**Τμήμα Μαθηματικών**

**«Επίλυση Μαθηματικού- Περιβαλλοντικού Προβλήματος**

**στην Σχολική Τάξη»**



**Ομαδική Εργασία στο μάθημα «Η Διδασκαλία μέσω επίλυσης προβλήματος-Μαθηματικοποίηση»**

**Λεόντε Πέτρος Α.Μ. 1112202000110**

**Μαυρογεώργου Βασιλική Α.Μ. 1112202000125**

**Τίτλος Προβλήματος: «Μεσόγειος: Η θάλασσα που δεν πρέπει να πειράξουμε»**

**Περιβαλλοντική οπτική**

Η Μεσόγειος Θάλασσα αποτελεί το 2.6% της παγκόσμιας ποσότητας νερού και καλύπτει λιγότερο από το 1% της επιφάνειας των ωκεανών στη Γη[[1]](#footnote-1) . Παρόλ’ αυτά, αποτελεί σπίτι σε περισσότερα από 80 διαφορετικά είδη πανίδας[[2]](#footnote-2) τα οποία κινδυνεύουν, μεταξύ άλλων, κι εξαιτίας της έντονης εξάτμισης των νερών της Μεσογείου. Από την αρχαιότητα έως και σήμερα αποτελεί πολιτισμικό και εμπορικό κέντρο και κατέχει μεγάλο γεωπολιτικό ρόλο, όντας σταυροδρόμι τριών ηπείρων.  Για τον λόγο αυτό, ανά τους αιώνες, υπήρξαν πολλές προτάσεις και ιδέες ώστε η θάλασσα να αξιοποιηθεί στο μέγιστο. Μεταξύ αυτών, μία πρόταση που θα μας ξενίσει ήταν να αποξηραθεί η Μεσόγειος!

1. Για ποιους λόγους πιστεύετε ότι προτάθηκε κάτι τέτοιο; Θα μπορούσαν να υπάρχουν οφέλη από μια τέτοια κίνηση;
2. Ποιες θα μπορούσαν να είναι κάποιες πιθανές επιπτώσεις της συγκεκριμένης ιδέας;

Αφότου καταγράψετε τις απαντήσεις σας, στον ακόλουθο σύνδεσμο θα μπορέσετε να ανακαλύψετε περισσότερα γι’ αυτό το παράξενο εγχείρημα! <https://www.youtube.com/watch?v=TEdsQmjLMKs>



Αποξηραμένη Μεσόγειος. Σαφώς πιο όμορφη η τωρινή!

Υπάρχει περίπτωση να βρεθούμε αντιμέτωποι με ένα τέτοιο σενάριο, εξαιτίας του ανθρώπινου παράγοντα και των περιβαλλοντικών προβλημάτων που εντείνονται καθημερινά στον πλανήτη μας;

**Μαθηματική οπτική**

1. Εικόνα που περιέχει χάρτης, κείμενο, Άτλας

   Περιγραφή που δημιουργήθηκε αυτόματαΜελετώντας τον παρακάτω χάρτη, προσπαθήστε να προσεγγίσετε το εμβαδόν που έχει η Μεσόγειος, αξιοποιώντας γνωστά εμβαδά γεωμετρικών σχημάτων.
2. Χρησιμοποιώντας την προσέγγισή σας για το εμβαδόν στο 1ο ερώτημα, προσπαθήστε να δώσετε μια προσέγγιση για τον όγκο νερού της Μεσογείου, δηλαδή να βρείτε πόσος περίπου όγκος νερού θα έπρεπε να εξατμιστεί ώστε η Μεσόγειος να αποξηραθεί εντελώς. Για να το βρείτε, θα χρειαστείτε μια βασική πληροφορία από την ιστοσελίδα: <https://wwf.panda.org/discover/knowledge_hub/where_we_work/mediterranean/>
3. Σας δίνονται επιπλέον προσεγγιστικά τα ακόλουθα στοιχεία[[3]](#footnote-3):

|  |  |
| --- | --- |
| Εξάτμιση νερού ανά έτος | 1790 km­³/έτος |
| Παροχή νερού μέσω βροχής ανά έτος | 1060 km³/έτος |

Ας υποθέσουμε, λοιπόν, πως η ιδέα αποξήρανσης της Μεσογείου επανέρχεται στο προσκήνιο κι εφαρμόζεται. Με αυτόν τον τρόπο δεν υπάρχουν πλέον οι υδάτινοι δρόμοι του Βοσπόρου, της διώρυγας του Σουέζ, του Πορθμού του Γιβραλτάρ κλπ, οι οποίοι την **διατηρούν ζωντανή** εδώ και χιλιάδες χρόνια. Ταυτόχρονα, προς διευκόλυνσή μας, θα θεωρήσουμε αμελητέα την **συνεισφορά των διάφορων ποταμών** μπροστά στον όγκο νερού της Μεσογείου. Πόσα χρόνια λοιπόν θα χρειάζονταν μέχρι να αποξηραθεί πλήρως η Μεσόγειος;

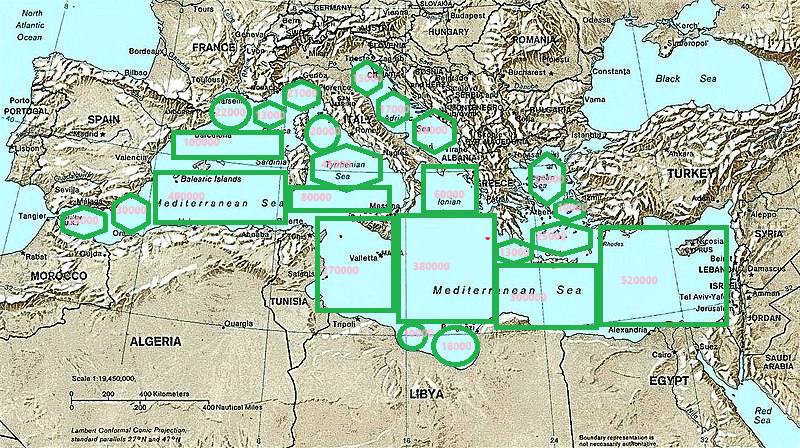
1. Παρατηρώντας προσεκτικά στον χάρτη, υπάρχει ένα κοκκινισμένο κομμάτι, εντός των ελληνικών υδάτινων συνόρων, που αποτελεί το βαθύτερο σημείο της Μεσογείου. Πρόκειται για το «Φρέαρ των Οινουσσών» ή αλλιώς «Καλυψώ» (Calypso Deep) και βρίσκεται δυτικά του Νοτίου μέρους της Πελοποννήσου. Αξιοποιώντας την πληροφορία που σας δίνει η **ιστοσελίδα της WWF**[[4]](#footnote-4) **παραπάνω** για το βαθύτερο σημείο:
   1. Να στρογγυλοποιήσετε στις δεκάδες τον αριθμό που βρήκατε.
   2. Πόσο πιστεύετε πως θα επηρεαζόταν το αποτέλεσμα που βρήκαμε στο 2ο ερώτημα, αν θεωρήσουμε πως το κοκκινισμένο κομμάτι είχε το μέγιστο βάθος, ενώ όλο το υπόλοιπο συνέχιζε να έχει το ίδιο μέσο βάθος; Υπολογίστε την διαφορά και υποστηρίξτε με νούμερα την απάντησή σας.
   3. Θα είχατε το ίδιο αποτέλεσμα αν αλλάζατε την τιμή του μέσου βάθους με αυτή του μεγίστου και το αντίστροφο; Πώς θα ερμηνευόταν αυτή η αλλαγή στο φυσικό περιβάλλον;

# **Ενδεικτική σκιαγράφηση επίλυσης του προβλήματος**

Λύση:

1. Από τα σχήματα που επιλέξαμε έχουμε τα εξής εμβαδά:

34000, 30000, 400000, 100000, 22000, 13000, 21000, 20000, 45000, 15000, 17000, 28000, 80000, 60000, 270000, 380000, 300000, 130000, 25000, 10000, 25000, 520000, 10000, 18000, που αθροίζουν στα 2573000 τετραγωνικά χιλιόμετρα



1. 15 x 2573000 = 38595000 κυβικά χιλιόμετρα. (15000 μέτρα= 15 χιλιόμετρα).
2. 1790-1060=730 km­³/έτος. 38595000/730= στρογγυλοποιημένο 52870 χρόνια.
3. a) Το μέγιστο βάθος είναι 5109 μέτρα, στρογγυλοποιημένο 5110 μέτρα.

b) Δεν θα επηρέαζε το ολικό αποτέλεσμα καθώς είναι πολύ μικρό σε σχέση με την υπόλοιπη έκταση. Είναι περίπου 800 τετραγωνικά χιλιόμετρα, οπότε θα είχε περίπου 3000 κυβικά χιλιόμετρα επιπλέον, πολύ μικρό σε σχέση με το υπόλοιπο.

c) Τα αποτελέσματα θα ήταν τελείως διαφορετικά, καθώς θα είχαμε παραπάνω από τετραπλάσιο όγκο νερού στην Μεσόγειο.

**Βασική παρατήρηση:** Στις πράξεις χρησιμοποιήθηκε και η απλή μέθοδος των τριών - εξίσωση, κατά τους υπολογισμούς που εξαρτιούνταν από την κλίμακα του χάρτη. Επιπλέον, οι μαθητές αναμένεται να αναλύσουν περαιτέρω τη σκέψη τους ως προς τα αποτελέσματα των πράξεων.

## **Το περιβαλλοντικής φύσης ζήτημα: Παρουσίαση του ζητήματος στο οποίο το πρόβλημα αναφέρεται**

**Ποιους αφορά;** Η απειλή αποξήρανσης της Μεσογείου, είτε από τεχνητά είτε από φυσικά αίτια αφορά σε πρώτο επίπεδο σίγουρα τους λαούς οι οποίοι συνορεύουν με τη Μεσόγειο. Όμως, είναι ένα πρόβλημα το οποίο μετέπειτα επηρεάζει και τα υπόλοιπα κράτη της Ευρώπης, της Μέσης Ανατολής και της Βορείου Αφρικής, διότι αφορά ζητήματα με επεκτάσεις στην γεωργία, την παραγωγή, την οικονομία, την (γεω)πολιτική κλπ.

**Ποια η σπουδαιότητα;** Πρόκειται για πρόβλημα το οποίο θα μπορούσαν να αντιμετωπίζουν κι οποιεσδήποτε θάλασσες παρόμοιας δομής, καθώς και οι γείτονες χώρες τους, όπως παράδειγμα είναι η Μαύρη Θάλασσα ή η Ερυθρά Θάλασσα. Επιπλέον, εστιάζουμε στο γεγονός πως ανθρώπινες παρεμβάσεις και ιδέες οι οποίες προτείνονται δεν αποσκοπούν πάντα στο βέλτιστο μακροπρόθεσμα σενάριο, αλλά μπορεί να αποτελέσουν και τροχοπέδη στην εξέλιξη και την ανάπτυξη σε πολλά επίπεδα. Οπότε θα πρέπει να αξιολογούνται με μεγάλη προσοχή όταν έχουν ως στόχο (τόσο αισθητές) μεταβολές τεράστιας κλίμακας.

**Υπάρχουν αντικρουόμενες θέσεις και ποιες;** Σαφώς υπάρχουν αντικρουόμενες θέσεις, δεδομένου ότι οι χώρες οι οποίες βρίσκονται στις ακτές της Μεσογείου έχουν οφέλη από την ύπαρξη της θάλασσας όσον αφορά το οικονομικό, το τουριστικό και το κλιματικό κομμάτι (γεωργία, πανίδα, χλωρίδα). Ταυτόχρονα, κάποιοι άλλοι ίσως να ισχυρίζονταν πως η αποξήρανση της Μεσογείου θα μπορούσε να συνεισφέρει στη γονιμότητα των εδαφών της περιοχής εκείνης, ώστε να υπάρξει αύξηση της παραγωγής, καθώς και διευκόλυνση των μετακινήσεων μεταξύ των χωρών. Από την άλλη, το ίδιο επιχείρημα θα μπορούσε να αξιολογηθεί στον αντίποδα αρνητικά και εν τέλει αξιολογήθηκε αρνητικά από το μεγαλύτερο μέρος της επιστημονικής κοινότητας, καθώς επικράτησε η φωνή της λογικής που προέβλεπε τις καταστροφικές συνέπειες. Δυστυχώς σε άλλες όχι και τόσο προφανείς καταστάσεις δεν έγινε κάτι αντίστοιχο.

# **Περιγραφή του σχεδιασμού του προβλήματος**

**Εκκίνηση:** Η εκκίνησή μας έγινε με την εύρεση του περιβαλλοντικού προβλήματος.

**Οργάνωση:** Για να αναλύσουμε περαιτέρω το παραπάνω, ακολουθήσαμε τα παρακάτω βήματα:

1. Προσπαθήσαμε να βρούμε τον χώρο που θα κινηθούμε και θα αφορά το περιβαλλοντικό πρόβλημα.
2. Θελήσαμε να εκμεταλλευτούμε την γεωπολιτική μας θέση ως χώρα και σκεφτήκαμε να περιγράψουμε ένα ζήτημα που θα είχε άμεση επιρροή σε εμάς.
3. Παρόλ’ αυτά, για να είναι λίγο πιο ευρείας κλίμακας, κινηθήκαμε σε έναν άξονα εύρεσης προβλήματος που θα αφορά περισσότερες χώρες και καταλήξαμε σε ζητήματα που αφορούν τη Μεσόγειο.
4. Έπειτα από αναζήτηση, συναντήσαμε την πρόταση αποξήρανσης της Μεσογείου, μας φάνηκε παράλογο ελαφρώς κι αποφασίσαμε να εστιάσουμε σε αυτό.
5. Αναρωτηθήκαμε για πιθανές μαθηματικές έννοιες που θα είχαν άμεση σύνδεση με το παρόν πρόβλημα, όπως είναι οι έννοιες του όγκου, της αξιοποίησης των προσεγγίσεων, της κλίμακας (χάρτης) και της μετατροπής μονάδων.
6. Δομήσαμε, αξιολογώντας τις πληροφορίες και τις παραμέτρους μας, ένα ρεαλιστικό πρόβλημα επάνω στο οποίο κινούμαστε βαθμιαία, από απλούστερες έννοιες (εμβαδόν, όγκος) σε πιο σύνθετες (διαφορά μέσου βάθους, μεγίστου βάθους).

**Δυσκολίες:** Για να μην αποτελεί ένα πρόβλημα κλειστού τύπου, όπου απλά θα αξιοποιείται έτοιμη πληροφορία και θα λαμβάνεται μόνο μια ακριβής ορθή απάντηση, έπρεπε να υπάρξει κατάλληλη παρουσίαση των πληροφοριών. Δηλαδή, ο στόχος δεν ήταν να υπάρξει καταιγισμός πληροφοριών για τον μαθητή από πλευράς αριθμητικών δεδομένων, αλλά διατύπωση ερωτημάτων με σαφή και ξεκάθαρο τρόπο. Ακόμη, τα ερωτήματα έπρεπε να δοθούν με μια λογική σειρά χωρίς να υπάρχουν άλματα, αλλά η ίδια η άσκηση να κατευθύνει τον μαθητή (λ.χ. αν ζητούσαμε κατευθείαν τον μέσο όγκο, ο μαθητής θα έπρεπε από μόνος του να σκεφτεί να συνδυάσει τη μέτρηση του εμβαδού με το μέσο βάθος το οποίο μάλιστα θα έπρεπε να ψάξει). Τέλος, θεωρήσαμε πως έπρεπε να υπάρχουν και πιο «υποκειμενικές ερωτήσεις» που θα τους εγείρουν το ενδιαφέρον και θα τους βοηθούν να κατανοήσουν κάποιες έννοιες και να τις συνδυάσουν με τον φυσικό κόσμο.

# **Το πλαίσιο διδασκαλίας**

**Τάξη:** Γ’ Γυμνασίου

**Πλαίσιο προβλήματος:** Στο παρόν πρόβλημα έχουμε αξιοποιήσει πραγματικές πηγές και πληροφορίες μαζί με μια ιδέα η οποία έχει προταθεί παλαιότερα και είναι αυθεντική. Τα έχουμε εντάξει σε ένα πλαίσιο στο οποίο επαναφέρουμε αυτήν την παλαιότερη ιδέα σαν πιθανό κίνδυνο εντός περιβαλλοντικού πλαισίου. Αποσκοπούμε στην διδασκαλία του για 2-3 διδακτικές ώρες, αναλόγως με τις ιδέες, τις διαδικασίες και τις αφορμήσεις των μαθητών για συζήτηση, δεδομένου του προβλήματος. Ξεκινάμε με την παρουσίαση του περιβαλλοντικού μέρους και στη συνέχεια συνδυάζουμε αυτά που είδαμε στο πρώτο μέρος με τις μαθηματικές μας γνώσεις. Έτσι, οι μαθητές καλούνται να επιλύσουν μια σειρά ερωτημάτων τα οποία δείχνουν εφαρμογές των μαθηματικών και τη χρησιμότητά τους, ώστε να κατανοήσουν περαιτέρω το ζήτημα και την κλίμακα του.

**Θεματικό πεδίο:** Άλγεβρα, γεωμετρία, στατιστική.

**Διδακτικοί στόχοι:**

1. **Μαθηματικοί:**
   1. Βλέπουν έμπρακτα την σημασία και τη χρήση της γεωμετρίας.
   2. Αναγνωρίζουν την χρησιμότητα της προσεγγιστικής φύσης όταν υπάρχει εφαρμογή σε πραγματικά προβλήματα.
   3. Χρησιμοποιούν τύπους για τα εμβαδά και γεωμετρικά όργανα, εξοικειώνονται με τις έννοιες του μέσου όρου, της στρογγυλοποίησης και της κλίμακας χάρτη.
   4. Μετατρέπουν δυνάμεις μέτρων σε δυνάμεις χιλιομέτρων.
   5. Χρησιμοποιούν εξισώσεις μέσω της «απλής μεθόδου των τριών» για να εκμεταλλευτούν τη γνώση της κλίμακας του χάρτη.
2. **Κοινωνικοί- περιβαλλοντικοί:**
   1. Ευαισθητοποιούνται κι ενημερώνονται για ένα ζήτημα που απασχολεί την ελληνική κοινωνία.
   2. Ποσοτικοποιούν τις μάζες νερού που υπάρχουν στη Μεσόγειο και αντιλαμβάνονται το πραγματικό μέγεθος της θάλασσας μέσω των μαθηματικών.
   3. Κατανοούν πόσο σημαντικό είναι να αμφισβητούνται καταστάσεις που θεωρούνται καταστροφικές, ακόμα κι αν προτείνονται από επιστήμονες.
   4. Μαθαίνουν να έχουν κριτική σκέψη και να μην μένουν αμέτοχοι στα κοινωνικά ζητήματα.
3. **Παιδαγωγικοί:**
   1. Διαχειρίζονται ανοικτά προβλήματα, όπου δεν είναι απαραίτητα μία η ορθή απάντηση.
   2. Σκέφτονται αναλυτικά και κριτικά κι αξιολογούν τη βαρύτητα των δεδομένων: όπως το πόσο λεπτομερώς θα «πάρουν» τα εμβαδά, το ρόλο που παίζει η κλίμακα του χάρτη κλπ.
   3. Δεν περιορίζονται μόνο στην ανάπτυξη μαθηματικών δεξιοτήτων, αλλά και στη λειτουργική χρήση χάρτη.
   4. Μαθαίνουν να βασίζονται σε δεδομένα, κατανοούν την εφαρμογή των μαθηματικών στον κόσμο.

**Πιθανές δυσκολίες μαθητών:** Θεωρούμε πως σε πρώτη φάση, οι μαθητές πιθανώς να συναντήσουν δυσκολία στο να διαχειριστούν πρόβλημα που πηγάζει από ένα πραγματικό γεγονός και να αξιοποιήσουν τα μαθηματικά σε αυτό το πλαίσιο, όπως παράδειγμα στο να μετρήσουν το εμβαδόν ή να αξιολογήσουν τη διαφορά μεταξύ μέσου όρου και μεγίστου. Τέλος, επειδή πρόκειται για ανοικτό πρόβλημα και θα υπάρξει συζήτηση στην τάξη, ίσως εμφανιστεί δυσκολία στο να υπάρξει κατανόηση των ιδεών και λύσεων όλων των μαθητών από τους συμμαθητές τους, κάτι που προκαλεί και την ανάγκη να επιχειρηματολογήσουν.

**Οργάνωση ‘debate’:** Αρχικά, θα μπορούσαμε να εκμεταλλευτούμε την οποιαδήποτε “διαφωνία” μεταξύ τεκμηριωμένων απόψεων των μαθητών ως ένα debate, καθώς και να αξιοποιήσουμε τις πληροφορίες από τις πηγές μας. Πιο συγκεκριμένα, κάποια σημεία του προβλήματος τα οποία θα μπορούσαν να υποστηρίξουν debate είναι τα ακόλουθα:

1. Για την εύρεση του εμβαδού στην 1η ερώτηση, κάποιος θα μπορούσε να υπολογίσει το εμβαδόν της περιοχής όλης της εικόνας και να αφαιρέσει όλα τα υπόλοιπα πλην της Μεσογείου (αν εκφραστεί αυτή η ιδέα, τη φέρνουμε σε αντιπαραβολή με την προτεινόμενη λύση, αν δεν εκφραστεί στην τάξη, την εκθέτουμε μέσα από ερωτήσεις και τη συζητάμε). Υπάρχει τελικά προτίμηση μεταξύ των δύο τρόπων, ναι ή όχι και γιατί;
2. Τι πιστεύουν οι μαθητές ότι θα συνέβαινε αν δεν θεωρούσαμε αμελητέα τη συνεισφορά των ποταμών; Παύει να είναι ακριβής η τωρινή μας μέτρηση; Ποια η λογική της προσέγγισης; (Είναι υποκειμενική η ακρίβεια ή επειδή λειτουργούμε προσεγγιστικά είμαστε εντάξει; )
3. Θα μπορούσαμε να εκμεταλλευτούμε και τις αντικρουόμενες θέσεις και τα ζητήματα που εγείρονται, καθώς και τη σημαντικότητα και το ποιους αφορά, που αναφέρονται παραπάνω, ως πιθανές θεματολογίες και αφορμήσεις για συζήτηση και debate.

* Ενδεικτικά, θα μπορούσαμε να θίξουμε τα ζητήματα περιβαλλοντικού χαρακτήρα, να γίνει μια συζήτηση για το τι πιστεύουν οι μαθητές για την ιδέα. Ύστερα, να παραθέσουμε δεδομένα για το τι θα γινόταν σε περίπτωση υλοποίησης και να επερωτήσουμε τους μαθητές για το τι πιστεύουν. Τελικά, να κάνουμε μια αναφορά στην ανάγκη να μην μένουμε αμέτοχοι στα ζητήματα της κοινωνίας μας, αλλά και παγκόσμια ζητήματα, και όταν θεωρούμε ότι κάποια κίνηση-ιδέα-απόφαση θα έχει καταστροφικά αποτελέσματα, να αντιτιθέμεθα σε αυτήν. Να ειπωθεί πως οφείλουμε να προστατεύουμε την φύση, ώστε να συνεχίζουμε να την απολαμβάνουμε εμείς και οι επόμενες γενιές.

# **Βιβλιογραφία και πηγές**

<https://www.youtube.com/watch?v=TEdsQmjLMKs>

<https://www.researchgate.net/publication/269818505_Water_resources_in_the_Mediterranean_quantity_and_quality>

<https://wwf.panda.org/discover/knowledge_hub/where_we_work/mediterranean/>

<https://www.wwfmmi.org/what_we_do/wildlife/>

<https://link.springer.com/article/10.1007/s00382-022-06188-2#:~:text=In%20the%20Black%20Sea%2C%20rivers,are%20lost%20via%20net%20evaporation>.

<https://el.alegsaonline.com/art/63447>

<https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_Mediterranean_countries>

<https://en.wikipedia.org/wiki/Calypso_Deep#:~:text=Calypso%20Deep%20is%20the%20deepest,N%2021°8′E>.

1. https://wwf.panda.org/discover/knowledge\_hub/where\_we\_work/mediterranean/ [↑](#footnote-ref-1)
2. https://www.wwfmmi.org/what\_we\_do/wildlife/ [↑](#footnote-ref-2)
3. https://link.springer.com/article/10.1007/s00382-022-06188-2#:~:text=In%20the%20Black%20Sea%2C%20rivers,are%20lost%20via%20net%20evaporation. [↑](#footnote-ref-3)
4. https://wwf.panda.org/discover/knowledge\_hub/where\_we\_work/mediterranean/ [↑](#footnote-ref-4)